Analytische oplossing van de invloedsdiepte van de Prandtl-wig

Ir. R.A. (Roel) van der Zee

Geo-ingenieurs

Samenvatting

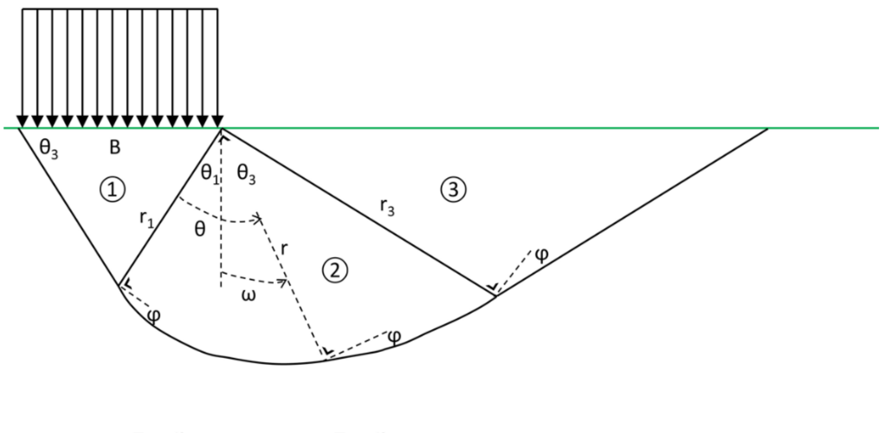
Draagkrachtberekeningen op staal worden vaak uitgevoerd met de draagkrachtformules van Prandtl en Brinch Hansen. Deze draagkrachtberekeningen kunnen met het rekenprogramma D-Foundations van Deltares uitgevoerd worden, maar ook met spreadsheets. Één van de nadelen van werken met spreadsheets is dat de invloedsdiepte bepaald moet worden, welke afhankelijk is van de inwendige wrijvingshoek van de ondergrond. Eurocode 7 heeft een tabel met invloedsdiepten als functie van de inwendige wrijvingshoek. In een spreadsheet zal dan geïnterpoleerd moeten worden tussen waarden in deze tabel, wat een omslachtige programmering vereist. In onderhavig artikel wordt een analytische oplossing van de invloedsdiepte bepaald, waardoor interpolatie in een spreadsheet niet meer nodig is.

Introductie

In 1920 publiceerde Prandtl een artikel over de Prandtl-wig. Met deze formule kan de draagkracht van de grond bepaald worden. Later hebben Brinch Hansen en andere onderzoekers onderzoek gedaan naar draagkracht van grond, onder andere door het effect van bovenbelasting mee te nemen en correctiefactoren te introduceren voor de vorm en de inclinatie van de fundering. Meer achtergrondinformatie over de Prandtl-wig kan gevonden worden in artikelen van prof. dr. ir. S. van Baars, zie de referenties.

Geometrie van de Prandtl-wig

De grond heeft een inwendige wrijvingshoek ϕ. In figuur 1 is de Prandtl-wig weergegeven. De Prandtl-wig bestaat uit 3 zones. Zones 1 en 3 zijn driehoeken, zone 2 is een logspiraal. De hoek θ_3 in zone 1 is gelijk aan $\pi/4 + \phi/2$. De onderste hoek in zone 1 is dan $\pi/2 - \phi$. De hoek θ_1 in zone 2 is dan $\pi/4 - \phi/2$.



$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \qquad \theta_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

Figuur 1 – Prandtl-wig

Afleiding van de invloedsdiepte

Vanuit de sinusregel in zone 1 volgt:

$\frac{r_1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{B}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}$ oftewel $r_1 = B\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}$

Omdat $r_3 = r_1 e^{0,5\pi\tan(\varphi)}$

Is $r_3 = B\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)e^{0,5\pi\tan(\varphi)}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}$

Voor het vervolg van de berekening is het makkelijker om een hoek ω te introduceren. ω is de hoek t.o.v. de verticaal (zie figuur 1), en is dus feitelijk gelijk aan $\theta - \theta_1$.

Voor een hoek ω t.o.v. de verticaal is $r(\omega,\varphi) = r_1 e^{(\omega+\theta_1)\tan(\varphi)}$, voor $-\theta_1 \leq \omega \leq \theta_3$

$$r(\omega,\varphi) = B\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}e^{\left(\omega+[\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}]\right)\tan(\varphi)}$$

De verticale component van r is r_y.

$r_y(\omega,\varphi) = r(\omega,\varphi) * \cos(\omega)$

De maximale verticale component van r is de invloedsdiepte.

De verticale component is maximaal als $\frac{d}{d\omega}r_y(\omega,\varphi) = 0$.

$$\frac{d}{d\omega}r_y(\omega,\varphi) = B\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}tan(\varphi)e^{\left(\omega+[\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}]\right)\tan(\varphi)} * \cos(\omega) - B\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}e^{\left(\omega+[\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}]\right)\tan(\varphi)} * \sin(\omega) = 0$$

Oftewel $tan(\varphi)\cos(\omega) = \sin(\omega)$

Hieruit volgt $tan(\varphi) = \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} = tan(\omega)$

r_y is dus maximaal als ω = φ.

Door substitutie van ω = φ volgt hieruit onderstaande formule. Met deze formule kan analytisch de invloedsdiepte van de Prandtl-wig berekend worden.

$$r_{y,max}(\omega=\varphi,\varphi) = B\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}e^{\left(\varphi+[\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}]\right)\tan(\varphi)} * \cos(\varphi)$$

Conclusie

Er is een analytische formule afgeleid om de invloedsdiepte van de Prandtl wig te bepalen. Voor draagkracht berekeningen die met spreadsheets worden uitgevoerd kan daarmee op eenvoudige wijze de invloedsdiepte bepaald worden.

Referenties

- Van Baars, S. (2017) 100 Jaar Prandtl-Wig: De draagkrachtfactoren. Vakblad geotechniek december 2017

- Van Baars, S. (2016) One hundred year Prandtl's Wedge, intermediate report, University of Luxembourg